

УДК 624.15

М.А. ГАДЖИЕВ, д-р техн. наук, Азербайджанский университет архитектуры и строительства (Баку); В.В. БАБАНОВ, канд. техн. наук, Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет; В.М. ДРААЗ, инженер, Азербайджанский университет архитектуры и строительства (Баку); Я.И. ГУСЕЙНОВ (shahruz97@gmail.com), инженер, Азербайджанский научно-исследовательский институт строительства и архитектуры

Решение задачи Буссинеска и его применение для расчета балок на упругом основании для одного случая неоднородности по глубине

Известно, что модели упругого основания в виде однородного полупространства преувеличивают их распределительную способность. Учет увеличения модуля упругости полупространства позволяет регулировать распределительную способность. В данном исследовании для конкретного закона увеличения модуля упругости по глубине, а именно в виде квадратного корня от глубины, решена задача Буссинеска и построена функция влияния осадок дневной поверхности основания от равномерно распределенной по прямоугольной площади нагрузки и с применением этих функций приведен расчет фундаментной полосы. Установлено, что учет глубинной неоднородности уменьшает распределительную способность основания, а также величины максимального изгибающего момента, возникающего в фундаменте.

Ключевые слова: гибкость, упругое полупространство, неоднородность, балка, осадка, функция влияния.

Труд профессора Буссинеска (Франция, 1885) «О распределении напряжений в упругой почве от сосредоточенной силы» до настоящего времени изучается в курсе механики грунтов и является основополагающим в теории распределения напряжений в грунтовой среде. Задача Буссинеска является базовой моделью при исследовании многих прикладных проблем не только в строительной механике, геомеханике, но и в других областях науки, в которых используются методы теории упругости. Этим объясняется регулярное появление в печати научных работ, посвященных тем или иным обобщениям задачи Буссинеска, связанным с усложнением граничных условий, дифференциальных уравнений теории упругости, структуры и упругих свойств полупространства и т. д. Так, А.Р.С. Selvadurai [1] обобщил классическое решение задачи Буссинеска на случай, когда нормально нагруженное упругое полупространство подкреплено диском или мембраной. Н.Г. Georgiadis, D.S. Anagnostou [2] построили соотношения классической теории упругости, предположив, что функция «деформация – плотность энергии» зависит не только от деформационных членов, но и от градиентов деформаций. В [3–5] решение задачи Буссинеска обобщено на случай полупространства, лежащего на упругом основании.

Использование модели упругой полуплоскости и полупространства сильно преувеличивает распределительную способность грунтовых оснований, т. е. в решениях, даваемых этими моделями, осадки основания за пределами загрузочной площадки затухают медленно, что не соответствует реально наблюдаемому в экспериментах фактам. Применение модели неоднородного по глубине полу-

пространства позволяет регулировать распределительную способность основания, что немаловажно с точки зрения практики [6]. Для расчета фундаментных балок на упругом основании необходимо иметь решение задачи Буссинеска для неоднородного по глубине полупространства [7, 8]. Вообще при расчете фундаментных балок на упругом основании важную роль играет методика определения осадки основания [9, 10]. Ниже дается решение этой задачи при различных формах неоднородности, а также анализируются их применение к расчету балок на упругом основании.

Как показано в [7, 8], при увеличении модуля упругости полупространства по закону:

$$E_z = E_0 \cdot [1 + f(z)] \quad (1)$$

перемещение дневной поверхности полупространства на расстоянии r от точки приложения сосредоточенной силы P определяется по формуле:

$$W(r) = \frac{3(1-\mu_0^2)}{2\pi E_0} \cdot P \cdot \int_0^\infty \frac{z^3 dz}{(z^2+r^2)^2 \cdot \sqrt{z^2+r^2} \cdot [1+3\varphi(\sqrt{z^2+r^2})]} \quad (2)$$

Функция, отражающая неоднородность по глубине, определяется следующим образом [2, 3]:

$$\varphi(\sqrt{z^2+r^2}) = \int_0^1 f(\tau \cdot \sqrt{z^2+r^2}) \cdot \tau^2 d\tau \quad (3)$$

В [2, 3] показано, что при увеличении модуля упругости основания по линейному закону $f(z) = \alpha \cdot z$ на основании формулы (2) осадка дневной поверхности основания на расстоянии r от точки приложения сосредоточенной силы P определяется выражением:

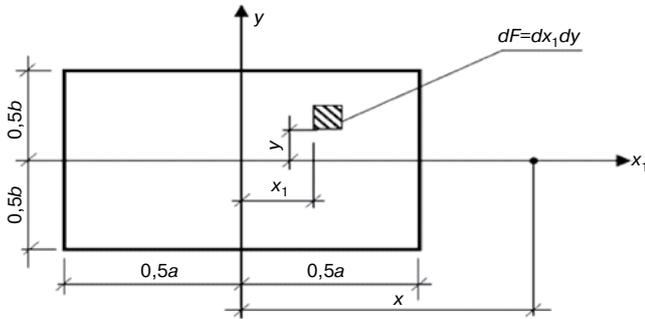


Рис. 1. Схема расчета неоднородности основания

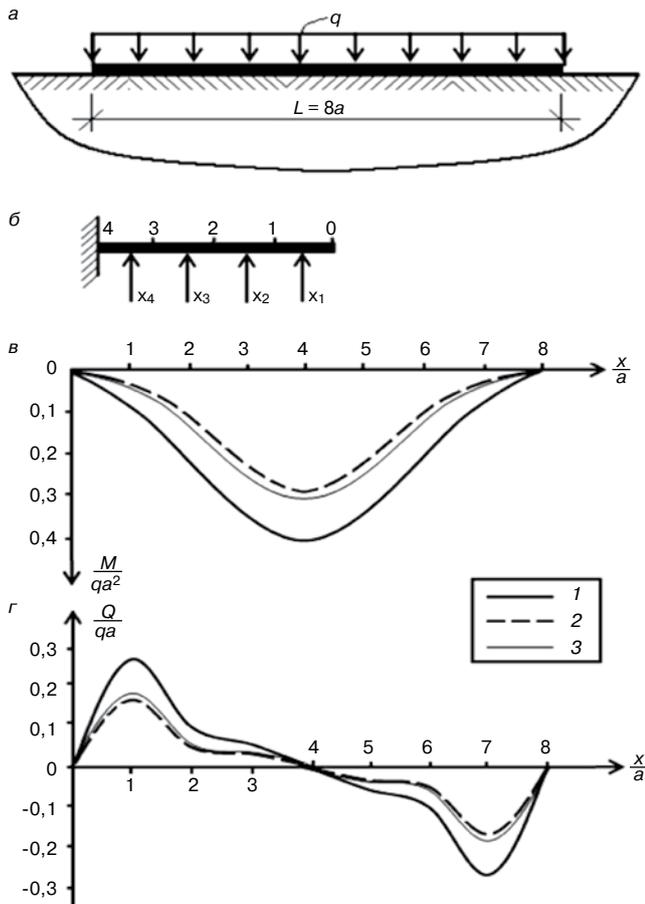


Рис. 2. Расчетная схема фундаментной полосы: а – схема; б – расчетная схема метода Б.Н. Жемочкина; в – эпюра изгибающих моментов; г – эпюра поперечных сил; 1 – однородное основание; 2 – неоднородное основание при $\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$; 3 – неоднородное основание при $\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$$w(r) = \frac{1 - \mu_0^2}{\pi E_0} \cdot P \cdot \left\{ \frac{1}{r} + \frac{9\alpha}{8} \cdot \left[\left(\frac{9\alpha^2 r^2}{16} - 1 \right) \cdot \ln \left(1 + \frac{4}{3\alpha r} \right) + \frac{1}{2} - \frac{3\alpha r}{4} \right] \right\} \quad (4)$$

а при увеличении модуля упругости по глубине по закону квадратной параболы $f(z) = \gamma \cdot z^2$ – соответственно выражением:

$$w(r) = \frac{1 - \mu_0^2}{\pi E_0} \cdot P \cdot \left\{ \frac{1}{r} + \frac{9\gamma r}{10} - \frac{3}{2} \cdot \sqrt{\frac{3\gamma}{2}} \cdot \left(1 + \frac{3\gamma r^2}{5} \right) \cdot \left[\frac{\pi}{2} - \arctg \left(r \cdot \sqrt{\frac{3\gamma}{5}} \right) \right] \right\} \quad (5)$$

Таблица 1

r.	0	0,5	1	2	3	4	5	6	7
$\psi(r)$	0	-0,615	-0,65	-0,7847	-0,8433	-0,8771	-0,8989	-0,9141	-0,9253

В данной статье исследуется случай, когда модуль упругости основания увеличивается по глубине по закону квадратного корня, т. е. $f(z) = \beta \cdot \sqrt{z}$. Подставив это выражение в (3) для функции, получим:

$$\varphi(\sqrt{z^2 + r^2}) = \int_0^1 \beta \cdot \sqrt[4]{z^2 + r^2} \cdot \sqrt{\tau} \cdot \tau^2 d\tau = \frac{2\beta}{7} \cdot \sqrt[4]{z^2 + r^2} \quad (6)$$

Теперь с учетом (6) зависимость (2) примет вид:

$$W(r) = \frac{3(1 - \mu_0^2)}{2\pi E_0} \cdot \int_0^\infty \frac{z^3 dz}{(z^2 + r^2)^2 \cdot \sqrt{z^2 + r^2} \cdot \left[1 + \frac{6\beta}{7} \cdot \sqrt[4]{z^2 + r^2} \right]} \quad (7)$$

Полученный интеграл выражается через элементарные функции. Проведя математические преобразования получим:

$$W(r) = \frac{(1 - \mu_0^2)}{\pi E_0 \cdot r} \cdot \left[1 + 3\alpha^2 \cdot r \cdot (1 - \alpha^4 \cdot r^2) \cdot \ln \frac{1 + \alpha \cdot \sqrt{r}}{\alpha \cdot \sqrt{r}} - \frac{12\alpha \cdot \sqrt{r}}{5} - \frac{3\alpha^2 \cdot r}{4} + \alpha^3 \cdot r \sqrt{r} - \frac{3\alpha^4 \cdot r^2}{2} + 3\alpha^5 \cdot r^2 \cdot \sqrt{r} \right] \quad (8)$$

Таким образом, получен аналог формулы Буссинеска для неоднородного по глубине полупространства, когда модуль упругости основания увеличивается по глубине согласно закону квадратного корня. В полученном выражении слагаемое, отражающее неоднородность основания:

$$\psi(r_*) = 3 \cdot r_*^2 \cdot (1 - r_*^4) \cdot \ln \frac{1 + r_*}{r_*} - \frac{12 \cdot r_*}{5} - \frac{3 \cdot r_*^2}{4} + r_*^3 - \frac{3 \cdot r_*^4}{2} + 3 \cdot r_*^5 \quad (9)$$

Здесь $r_* = \frac{6\beta \cdot \sqrt{r}}{7}$ – безразмерный параметр расстояния от сосредоточенной силы на дневной поверхности полупространства.

В табл. 1 показано, что учет неоднородности сильно уменьшает распределительную способность основания, так как функция, отражающая неоднородность, принимает только отрицательные значения. Варьируя параметр неоднородности основания β , можно удовлетворительно описать распределительную способность реальных грунтовых оснований.

При расчете фундаментных балок на упругом полупространстве широко применяется классический дискретный метод, предложенный в свое время профессором Б.Н. Жемочкиным (1962 г.). Согласно этой методике расчета нужно располагать функциями влияния осадок дневной поверхности полупространства от равномерно распределенной по прямоугольной площади нагрузки. Согласно рис. 1 на расстоянии x от центра загрузочной площадки:

$$W(x) = \frac{1 - \mu_0^2}{\pi E_0} \cdot q \cdot (J_1 + J_2 + J_3 + J_4),$$

где

$$J_1 = \int_{-0,5a}^{0,5a} \int_{-0,5b}^{0,5b} \frac{dx_1 dy}{\sqrt{(x - x_1)^2 + y^2}};$$

$$J_2 = 3\alpha^2 \cdot \int_{-0,5a}^{0,5a} \int_{-0,5b}^{0,5b} \{ \alpha^4 \cdot [(x - x_1)^2 + y^2] - 1 \} \cdot \ln(\alpha \cdot \sqrt[4]{(x - x_1)^2 + y^2}) dx_1 dy;$$

$$J_3 = \frac{12\alpha}{5} \cdot \int_{-0,5a}^{0,5a} \int_{-0,5b}^{0,5b} \frac{dx_1 dy}{\sqrt[4]{(x - x_1)^2 + y^2}};$$

Таблица 2

Однородное основание – β									
$\frac{x}{a}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$w(x) \cdot \frac{\pi E_0}{q \cdot (1 - \mu_0^2)}$	4,8121	1,0811	0,5094	0,3361	0,2511	0,2006	0,167	0,1431	0,1251
Неоднородное основание – $\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$									
$\frac{x}{a}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$w(x) \cdot \frac{\pi E_0}{q \cdot (1 - \mu_0^2)}$	2,8505	0,4312	0,1592	0,0909	0,0611	0,0449	0,0348	0,0281	0,0233
Неоднородное основание – $\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$									
$\frac{x}{a}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$w(x) \cdot \frac{\pi E_0}{q \cdot (1 - \mu_0^2)}$	3,3037	0,5466	0,2104	0,1228	0,0837	0,0621	0,0486	0,0395	0,0281

$$\text{где } r_{ij} = \sqrt{\left(\frac{a}{2} \cdot x_i - x\right)^2 + \frac{b^2}{4} \cdot x_j^2}.$$

В табл. 2 даны ординаты функции влияния осадок при различных значениях параметра неоднородности основания. Как видно из табл. 2, неоднородность основания сильно снижает распределительную способность основания.

В качестве тестового примера рассчитана полоса с постоянной изгибной жесткостью, нагруженная равномерно распределенной нагрузкой (рис. 2).

Как видно из эпюр, представленных на рис. 2, учет неоднородности основания по глубине заметно уменьшает максимальные значения изгибающего момента в балке. Для данного примера учет глубинной неоднородности основания

позволил уменьшить максимальный момент по сравнению с однородным основанием на 31,2%.

$$J_4 = \int_{0,5a}^{0,5a} \int_{-0,5b}^{0,5b} \left[\alpha^3 \cdot \sqrt{r} + 3\alpha^5 \cdot r \cdot \sqrt{r} - \frac{3\alpha^4 \cdot r}{2} - \frac{3\alpha^2}{4} + 3\alpha^2(1 - \alpha^4 r^2) \cdot \ln(1 + \alpha \cdot \sqrt{r}) \right] dx_1 dy,$$

$$\text{где } r = \sqrt{(x - x_1)^2 + y^2}.$$

Чтобы выделить особенности, которые могут возникнуть для внутренних точек загрузочной площадки, для вычисления вышеприведенных интегралов функцию осадок представим в виде суммы:

$$w(x) = \frac{1 - \mu_0^2}{\pi E_0} \cdot q \cdot (w_1(x) + w_2(x) + w_3(x) + w_4(x)),$$

где

$$w_1(x) = \int_{-\frac{a}{2}}^{-\frac{b}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{-\frac{b}{2}} w_*(r_{xy}) dx_1 dy; \quad w_2(x) = \int_{-\frac{a}{2}}^{-\frac{b}{2}} \int_{\frac{a}{2}}^{\frac{b}{2}} w_*(r_{xy}) dx_1 dy;$$

$$w_3(x) = \int_{\frac{a}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{-\frac{b}{2}} w_*(r_{xy}) dx_1 dy; \quad w_4(x) = \int_{\frac{a}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{\frac{a}{2}}^{\frac{b}{2}} w_*(r_{xy}) dx_1 dy;$$

$$r_{xy} = \sqrt{(x_1 - x)^2 + y^2};$$

$$w_*(r_{xy}) = \frac{1}{r_{xy}} + 3\alpha^2 \cdot (\alpha^4 \cdot r_{xy}^2 - 1) \cdot \ln \frac{\alpha \cdot \sqrt{r_{xy}}}{1 + \alpha \cdot \sqrt{r_{xy}}} - \frac{12\alpha}{5\sqrt{r_{xy}}} - \frac{3\alpha^2}{4} + \alpha^3 \cdot \sqrt{r_{xy}} - \frac{3\alpha^4 \cdot r_{xy}}{2} + 3\alpha^5 \cdot r_{xy} \cdot \sqrt{r_{xy}}.$$

Применив к каждому из этих интегралов численное интегрирование методом Гаусса с восемью узловыми точками можно определить осадку в любой точке дневной поверхности неоднородного по глубине полупространства. Выбирая параметр достаточно малым, можно с любой заданной точностью вычислить осадку в центре загрузочной площадки. Для точек, находящихся за пределами загрузочной площадки, осадка определяется по формуле:

$$w(x) = \frac{1 - \mu_0^2}{\pi E_0} \cdot q \cdot \frac{ab}{4} \cdot \sum_{i=1}^{i=8} \sum_{j=1}^{j=8} C_i C_j w_*(r_{ij}),$$

Список литературы

1. *Selvadurai A.P.S.* On the Surface Displacement of an isotropic elastic half-space containing an inextensible membrane reinforcement // *Mathematics and Mechanics of Solids*. 2009. Vol. 14. № 1–2. P. 1.
2. *Georgiadis H. G., Anagnostou D.S.* Problems of the Flamant-Boussinesq and Kelvin Type in Dipolar Gradient Elasticity // *Journal of Elasticity*. January 2008. Vol. 90. № 1. Pp. 71–98.
3. *Залётов В.В.* Распределение напряжений в изотропном полупространстве при заданных граничных условиях смешанного типа // *Труды ИПММ НАН Украины*, 2006. Т. 13. С. 83–91.
4. *Залётов В.В.* Аналитическое решение смешанной задачи теории упругости для изотропного полупространства // *Труды ИПММ НАН Украины*, 2007. Т. 14. С. 74–82.
5. *Залётов В.В., Хапилова Н.С.* Закономерности распределения перемещений в изотропном полупространстве, лежащем на упругом основании, при действии сосредоточенных сил // *Труды ИПММ НАН Украины*, 2010. Т. 20. С. 65–74.
6. *Burland J.B., Standing J.R., Jardine F.M.* Building response to tunnelling. Case studies from construction of the Jubilee Line Extension, London, vol.1: projects and methods. London, UK: Imperial College, CIRIA, 2001. 344 p.
7. *Гаджиев М.А., Ахундова М.Т.* Задача Буссинеска для неоднородного по глубине полупространства // *Ученые записки Азербайджанского инженерно-строительного университета*. Баку. 1996. № 1. С. 207–212.
8. *Гаджиев М.А., Валид Мохаммад Драаз.* Балки и рамы на упругом основании. Баку: TI-MEDIA, 2012. 150 с.
9. *Кушнер С.Г.* Расчет деформаций оснований зданий и сооружений. Запорожье: ИПО «Запорожье», 2008. 490 с.
10. *Франк Р.* Некоторые аспекты взаимодействий между грунтом и сооружением согласно Еврокоду 7 «Геотехническое проектирование» // *Геотехника*. 2010. № 3. С. 54–64.