

УДК 624.044.2

К.Г. ШАШКИН, канд. техн. наук, ООО «ПИ Геореконструкция» (Санкт-Петербург);
В.А. ШАШКИН, инженер, Санкт-Петербургский государственный
архитектурно-строительный университет

Решение задач предельного равновесия с использованием метода конечных элементов

Рассмотрены вопросы перехода задач деформирования основания в задачи предельного равновесия. Приведено сравнение задач, решенных с применением метода конечных элементов с численными и аналитическими решениями теории предельного равновесия, выделены основные факторы, влияющие на вид графика «нагрузка-осадка» для штампа на идеально упругопластическом основании.

Ключевые слова: напряженно-деформированное состояние, предельное равновесие, метод конечных элементов.

Решение задач предельного равновесия для определения несущей способности различного типа фундаментов имеет длинную историю. Точные решения для случая невесомого грунта были получены в начале XX в. Л. Прандтлем (1921 г.) и Г. Рейсснером (1924 г.). Для практического случая основания с ненулевым удельным весом, углом внутреннего трения и сцеплением К. Терцаги (1943 г.) сформулировал классическую трехчленную формулу:

$$p_u = N_c c + N_q q + \frac{1}{2} N_\gamma b \gamma, \quad (1)$$

в которой коэффициенты N_c , N_q и N_γ определяются в зависимости от значений угла внутреннего трения. По решению Л. Прандтля:

$$N_q = \frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi} e^{\pi \tan \phi}, \quad N_c = (N_q - 1) c \tan \phi.$$

Определение коэффициента N_γ оказывается существенно более сложным. Методику решения данной задачи для плоской постановки сформулировал В.В. Соколовский (1942 г.). В.Г. Березанцев обобщил данную задачу для случая осевой симметрии. Вопросам оценки несущей способности фундамента с учетом собственного веса грунта посвящены работы Г. Мейергофа (1951 г.), Й. Хансена (1970 г.), А. Весича (1975 г.). Основополагающие теоретические решения были получены Д. Друкером (1952 г.). Для случая идеально упругопластического материала с ассоциированным законом пластического течения им были сформулированы теоремы о верхней и нижней границах, в пределах которых должно находиться значение предельной нагрузки.

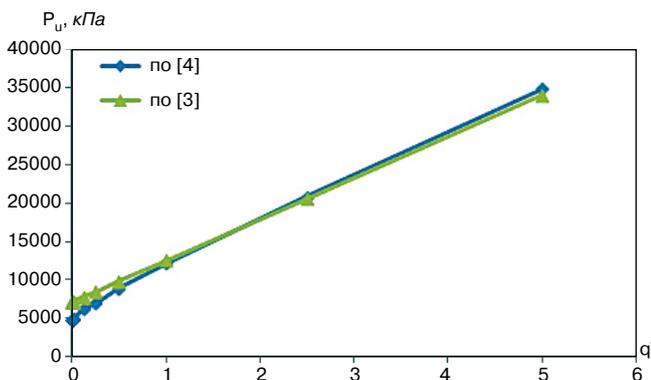


Рис. 1. Зависимость $p_u(q)$ при $\phi=45^\circ$ и $c=0$ по аппроксимации [3] и по точному решению [4]

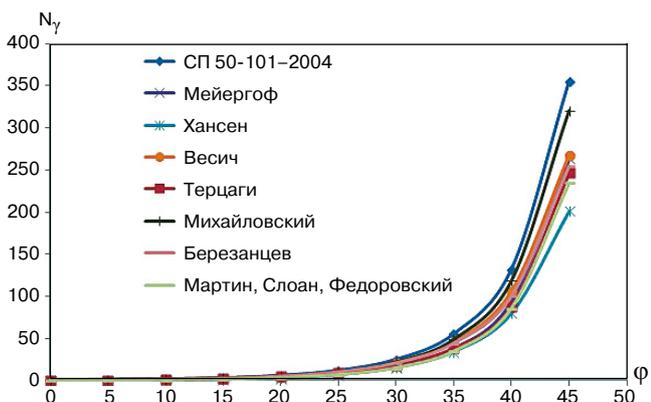


Рис. 2. Сравнение величин коэффициента N_γ , вычисленного по различным решениям

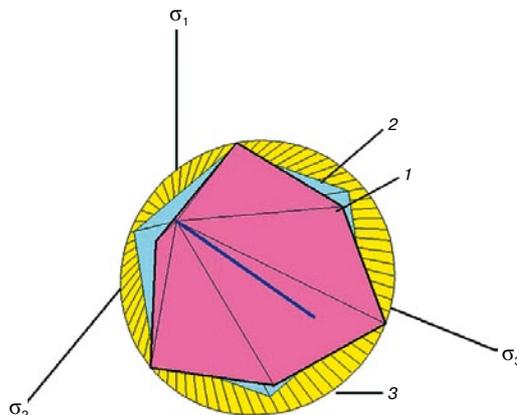


Рис. 3. Сравнение положения предельных поверхностей: 1 – по условию Кулона–Мора; 2 – по выражению $q_{lim} = Mr(4)$; 3 – по модели Друкера–Прагера

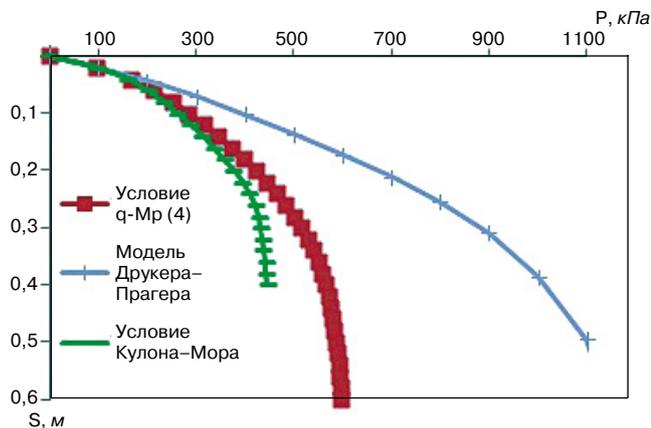


Рис. 4. Сравнение графиков «нагрузка-осадка» при использовании условия (4), модели Друкера–Прагера (описанный конус вокруг пирамиды Кулона) и классической модели с критерием Кулона–Мора

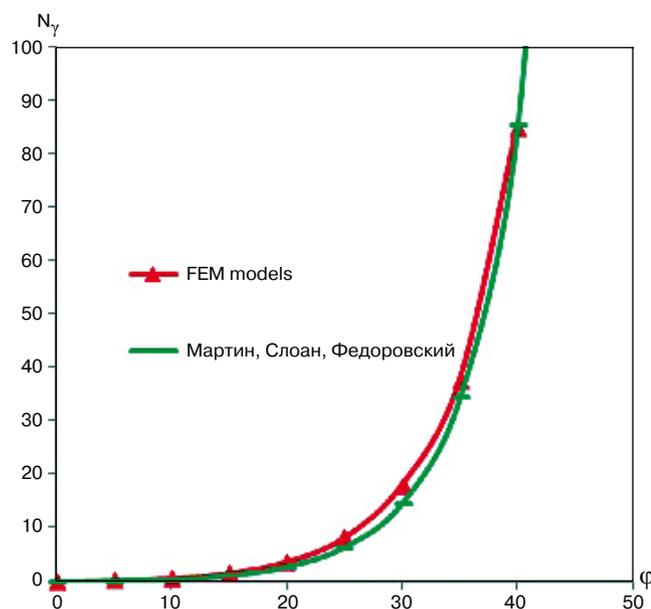


Рис. 5. Сравнение коэффициента N_γ по результатам решения упругопластических задач в программе FEM models и по решению С. Мартина, С. Слоана и В.Г. Федоровского

В последние годы решением задач предельного равновесия успешно занимались А.М. Караулов (2002 г.) [1], В.Г. Федоровский (2005 г.) [2], К.В. Королев (2010 г.) [3] и др.

Следует отметить, что коэффициенты N_γ , приведенные в отечественных нормативных документах и в [3], отражают решение задачи при наличии пригрузки и угла внутреннего трения при условии:

$$q' = \frac{q + c \cdot \text{ctg}\phi}{\gamma b} > 1.$$

При приближении q' к нулю зависимость $p_u(q)$ приобретает нелинейный характер, в результате чего, как отмечается в [2, 3], формула (1) становится принципиально неверной (рис. 1). Поэтому коэффициенты N_γ , приведенные в [3] и в отечественных нормах, отвечают линейному участку зависимости $p_u(q)$ и несправедливы для случая штампа на поверхности или на небольшой глубине в сыпучей среде.

Задача определения несущей способности штампа на поверхности сыпучей среды (при q' , стремящейся к нулю) долгое время являлась недоступной для точного теоретического решения. Ввиду сложностей, связанных с учетом соб-

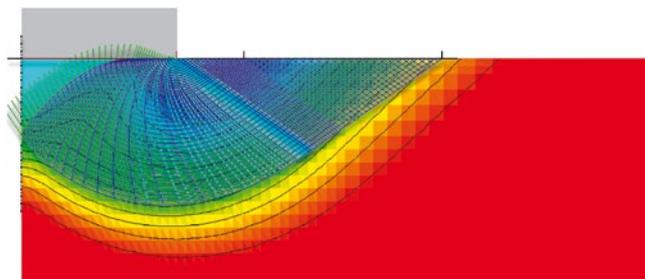


Рис. 6. Сравнение областей сдвига (максимальные перемещения) при решении упругопластических задач и по теории предельного равновесия при $\phi=20^\circ$

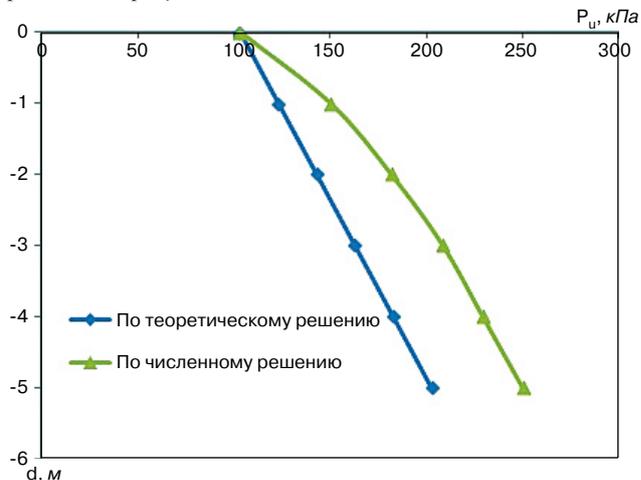


Рис. 7. Зависимость предельного давления от глубины заложения фундамента d шириной $b=2$ м при $c=20$ кПа; $\phi=0^\circ$

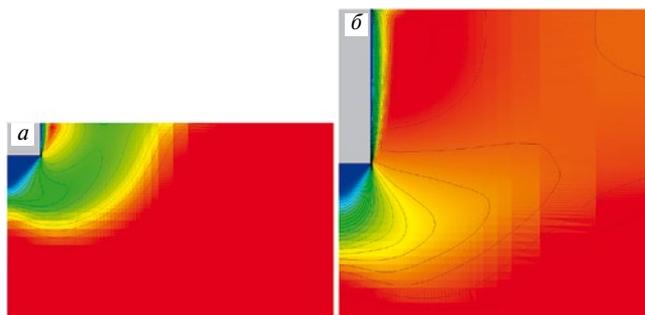


Рис. 8. Характер областей сдвига (максимальные перемещения на стадии потери устойчивости) при различном заглублении фундамента шириной $b=2$ м при $c=20$ кПа; $\phi=0^\circ$: а – 1 м; б – 5 м

ственного веса, получено большое число примерных значений коэффициента N_γ , отличия между которыми зачастую значительны, особенно для углов внутреннего трения, превышающих 30° . С. Слоаном и др. [5] путем решения задачи предельного равновесия методом конечных элементов были получены значения коэффициента N_γ по нижнему и верхнему пределам, отличающимся не более чем на 3,4% друг от друга. Величины N_γ , полученные Марином [4], находятся в границах, полученных Слоаном. В статье В.Г. Федоровского [2] приведено точное решение более общей задачи с учетом наклонного действия нагрузки на штамп. В частном случае для идеально шероховатого штампа и вертикальной нагрузки коэффициенты N_γ практически точно совпадают с результатами, приведенными в статье С. Мартина, и лежат в границах, приведенных в статье С. Слоана.

Таким образом, анализ данных работ позволяет утверждать, что для коэффициента N_γ в случае фундамента на по-

Теория	Угол внутреннего трения ϕ									
	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°	
СП 50-101–2004*	0,4	1,2	2,7	5,76	11,74	24,78	55	132,02	355,22	
Eurocode 7 (Vesic)	0,1	0,52	1,58	3,94	9	20,1	45,24	106,04	267,74	
Слоан	верхняя граница	0,12	0,456	1,238	2,961	6,738	15,237	35,649	88,39	240,88
	нижняя граница	0,115	0,434	1,178	2,822	6,431	14,567	33,951	83,327	224,945
Мартин, Федоровский	0,11	0,43	1,18	2,84	6,49	14,76	34,48	85,58	234,3	

верхности сыпучего основания наконец найдено точное решение. Авторы [2, 4, 5] различным путем пришли практически к одинаковым значениям коэффициента N_γ , которые существенно меньше значений, приведенных в отечественных нормах. Причиной расхождения является то, что для специфической задачи о незаглубленном штампе в несвязной среде коэффициент N_γ , строго говоря, не является независимым коэффициентом в формуле (1), а сам является функцией от величины пригрузки, поскольку функция $p_u(q')$ становится нелинейной (рис. 1).

Коэффициенты по работам С. Мартина, С. Слоана, В.Г. Федоровского в сравнении с данными отечественных и зарубежных норм приведены в таблице и на рис. 2. Учитывая наличие точных решений для N_γ при $q' < 1$, представляется актуальным ввести ограничение на применение обычных коэффициентов N_γ при $q' < 1$. Для этого участка целесообразно использовать более точную аппроксимацию нелинейного участка зависимости $p_u(q')$ по сравнению с формулой К. Терцаги (1).

Факторы, влияющие на вид графика «нагрузка-осадка» при решении задач о вдавлении штампа:

- модуль деформации грунта и размер расчетной области;
- величина коэффициента Пуассона;
- вид деформирования (дренированная или недренированная постановка задачи);
- вид пластического течения: ассоциированный или неассоциированный, например равнообъемный, закон пластического течения;
- начальное напряженное состояние, обычно характеризуемое коэффициентом бокового давления K_0 (те программы, которые не позволяют регулировать коэффициент K_0 на стадии природного напряженного состояния, непригодны для решения геотехнических задач);
- особенности поверхности текучести.

На последнем факторе стоит остановиться особо. Не секрет, что в различных конечно-элементных программах используются модели с разными поверхностями текучести, близкими к классическому критерию Кулона–Мора. Например, в модели Друкера–Прагера вместо шестигранной пирамиды Кулона–Мора используется коническая поверхность (рис. 3).

Результаты решения конечно-элементных задач показывают, что коническая поверхность, **описанная** вокруг пирамиды Кулона–Мора, приводит к существенно большей несущей способности, чем по классическому критерию Кулона–Мора (рис. 4). С другой стороны, коническая поверхность, **вписанная** в пирамиду Кулона–Мора, не соответствует критерию прочности при $\sigma_2 = \sigma_3$, т. е. при обычном напряженном состоянии в трехосных испытаниях. В результате пользователь модели Друкера–Прагера оказывается перед дилеммой, чаще всего им не осознаваемой: либо существенно завысить несущую способность основания по сравнению с классическими решениями, либо пренебречь возможностью моделирования трехосных испытаний.

Другим примером отклонения от поверхности Кулона–Мора являются модели типа Cam Clay. Данные модели традиционно строятся в координатах $p = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3$ и $q = (\sigma_1 - \sigma_3)/2$. В этих осях можно провести линию:

$$q_{lim} = Mp. \tag{4}$$

При $M = \frac{3 \sin \phi}{3 - \sin \phi}$ эта линия соответствует критерию Кулона–Мора, но при одном условии: $\sigma_2 = \sigma_3$. В целом же критерий (4) дает пирамиду, несколько отличающуюся от пирамиды Кулона–Мора (рис. 5). В результате решения идеально упругопластической задачи с критерием (4) мы получаем существенно иной о график «нагрузка-осадка» и другую несущую способность фундамента (рис. 6). Поэтому при использовании моделей типа Cam Clay с критерием (4) следует иметь в виду, что несущая способность фундамента

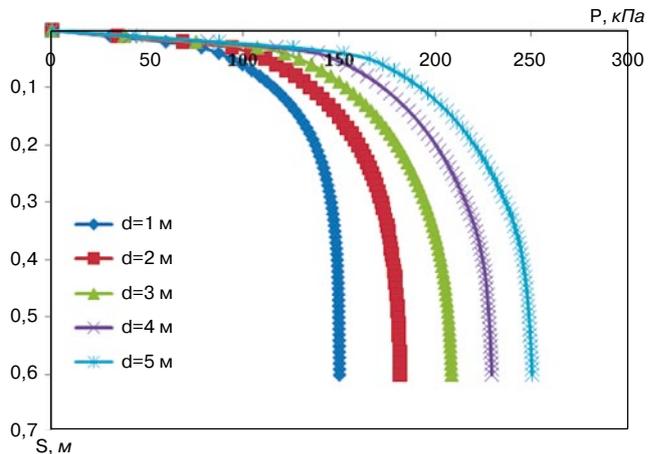


Рис. 9. Зависимость осадки S от нагрузки p при различном заглублении фундамента

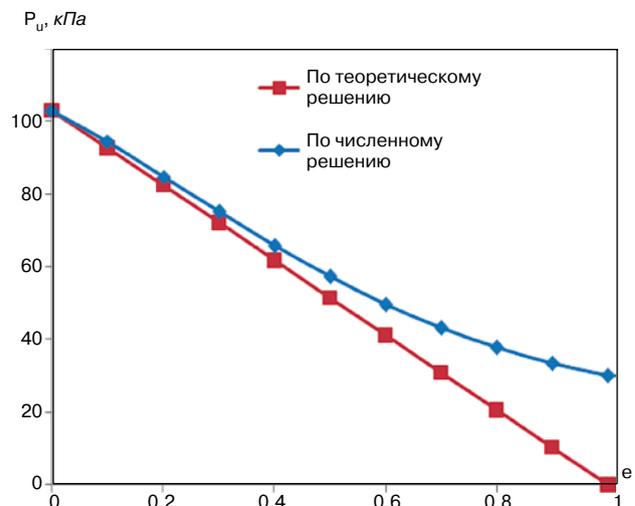


Рис. 10. Зависимость предельного давления от эксцентриситета приложения нагрузки e для фундамента шириной $b=2$ м при $c=20$ кПа, $\phi=0^\circ$

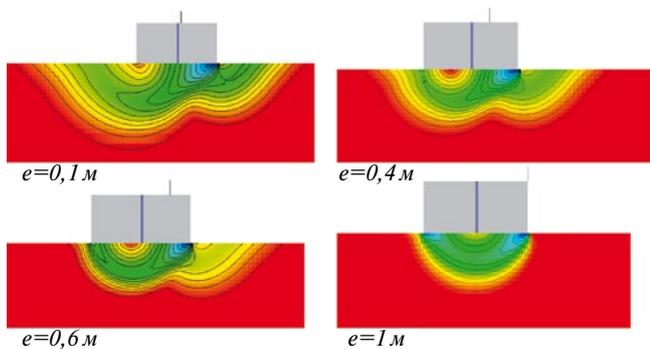


Рис. 11. Характер областей сдвига (максимальные перемещения на стадии потери устойчивости) при различном эксцентриситете e для фундамента шириной $b=2$ м при $c=20$ кПа; $\varphi=0^\circ$

получается несколько выше, чем по решениям теории предельного равновесия.

Таким образом, следует обратить внимание специалистов на множество факторов, от которых зависит график «нагрузка-осадка», даже при использовании простейшей идеально упругопластической модели. При использовании более сложных моделей количество факторов многократно увеличивается.

Сравнение коэффициента N_γ по результатам решения упругопластических задач и по теории предельного равновесия. Проведенные исследования позволили установить, что проблемы с получением предельной несущей способности, описанные в [3], связаны не с недостатками МКЭ, а с особенностями решения данной задачи при использовании конечных элементов 1-го порядка. Использование этих элементов для решения геотехнических задач возможно только при использовании специальной техники интегрирования вектора сил. В противном случае элементы 1-го порядка дают некорректные значения предельной нагрузки и некорректные деформации в допредельном состоянии. Кроме того, решение упругопластических задач, переходящих в задачи предельного равновесия, сопряжено с рядом дополнительных трудностей. В частности, при угле внутреннего трения выше 30° для получения корректного решения приходится существенно увеличивать точность решения задачи. На рис. 7 приведено сравнение результатов расчета коэффициентов N_γ по программе FEM models (использование выражения (3) для элементов 1-го порядка) и по приведенным в п. 1 решениям теории предельного равновесия. Как видно из сравнения, метод конечных элементов позволяет получить решения, достаточно близкие к значениям, полученным С. Слоаном, С. Мартином и В.Г. Федоровским [2, 4, 5], чего не удается достичь при использовании программы PLAXIS в связи с особенностями работы алгоритма автовыбора шага нагружения.

На рис. 8 приведено сравнение областей предельного состояния, полученных по решению упругопластической задачи методом конечных элементов и по программе С. Мартина [4], демонстрирующее их удовлетворительное совпадение.

Оценка несущей способности заглубленного фундамента и фундамента с эксцентрично приложенной нагрузкой выполнялась для идеально связной среды (с нулевым углом внутреннего трения). В соответствии с классическими решениями учет заглубления фундамента производится через добавление по поверхности нагрузки q , равной давлению грунта выше подошвы заглубленного фунда-

мента. Однако в реальности при увеличении заглубления начинает играть роль не только пригрузка основания рядом с фундаментом, но и прочность грунта выше подошвы штампа, что приводит к увеличению предельной нагрузки по сравнению с теоретическим решением (рис. 9).

Как видно из рис. 8, а, при небольшой глубине фундамента происходит выпор по форме, близкой к незаглубленному фундаменту. При увеличении заглубления фундамента область выпора становится менее определенной (рис. 8, б). Кроме того, из рис. 9 видно, что при увеличении заглубления штампа увеличивается зона линейного поведения на графике «нагрузка-осадка».

Учет эксцентриситета приложения нагрузки в отечественных нормах выполняется путем уменьшения ширины рассчитываемого фундамента $b'=b-2e$, где e – эксцентриситет приложения нагрузки. Данный подход также вполне оправдан при небольшом эксцентриситете (рис. 10). Однако при приближении точки приложения нагрузки к краю фундамента такой подход приводит к снижению до нуля несущей способности. В то же время очевидно, что при расположении нагрузки на краю фундамента несущая способность фундамента должна быть сильно сниженной, но ненулевой. Конечно-элементное решение показывает именно такую зависимость (рис. 10). Формы потери устойчивости при эксцентричном приложении нагрузки приведены на рис. 11.

Для фундаментов на несвязном основании при небольшом заглублении подошвы представляется целесообразным внести коррективы в нормативные документы на основании точных решений, полученных С. Слоаном, С. Мартином и В.Г. Федоровским. Необходимо также внести ограничения на использование обычных (заложенных в нормативные документы) коэффициентов N_γ при небольшом заглублении фундаментов в несвязном грунте или откорректировать традиционно применяемую трехчленную формулу и применить более точную аппроксимацию для мало заглубленных фундаментов.

Решение задач предельного равновесия методом конечных элементов позволяет получить коэффициенты N_γ , близкие к решениям С. Слоана, С. Мартина и В.Г. Федоровского.

Использование метода конечных элементов позволяет уточнить особенности потери устойчивости основания для ряда задач, которые имеют только приближенное решение по теории предельного равновесия, в частности для задач с заглубленным штампом, с эксцентриситетом приложения нагрузки или с критериями прочности, отличающимися от критерия Кулона–Мора.

Список литературы

1. Караулов А.М. Несущая способность основания осесимметричных фундаментов. Новосибирск: СГУПС, 2002. 104 с.
2. Федоровский В.Г. Несущая способность сыпучего основания ленточного фундамента при действии наклонной внецентренной нагрузки. // Основания фундаментов и механика грунтов. 2005. № 4. С. 1–7.
3. Королев К.В. Плоская задача теории предельного равновесия грунтов. Новосибирск: СГУПС, 2010. 250 с.
4. Martin C.M. Exact bearing capacity calculations using the method of characteristics // Proc. 112-th Int. Conf. IACMAG, Turin. 2005. Pp. 441–450.
5. Hjjaj M., Lyamin A.V., Sloan S.W. Numerical limit analysis solutions for the bearing capacity factor N_γ // International Journal of Solids and Structures 42. 2005. Pp. 1618–1704.